

Das Problem der falschen Kugel (Problem der 12 Kugeln)

Prof. Dr. Peter Berger

– für Louise –



Problem

Man hat 12 Kugeln, von denen 11 gleich schwer sind, die letzte ist entweder leichter oder schwerer als die anderen; wir nennen diese die Kugel X. Finde durch nur drei Wägungen mit einer Balkenwaage die Kugel X heraus, und gib an, ob sie schwerer oder leichter als die anderen ist.

Lösung

Wenn wir den Wägeprozess durchführen, finden wir schrittweise für immer mehr Kugeln heraus, dass sie Normalgewicht haben, bei einigen bleibt das zunächst noch offen. Diejenigen Kugeln, von denen wir schon sicher wissen, dass sie Normalgewicht haben, nennen wir „Normalos“. Die Kugeln, von denen wir das noch nicht wissen, nennen wir „Problemos“ (weil wir die Lösung des Problems, die Kugel X, nur noch unter ihnen suchen müssen). Vor unserer ersten Wägung sind alle 12 Kugeln Problemos, weil wir über sie noch nichts wissen.

WÄGUNG 1: (1,2,3,4) – (5,6,7,8)

beide Seiten gleich schwer

Dann müssen die Kugeln 1 bis 8 auch einzeln alle gleich schwer sein, sie sind ab sofort also Normalos. X muss unter den restlichen Kugeln 9 bis 12 sein, nur diese vier sind jetzt noch Problemos.

WÄGUNG 2: (3 beliebige Normalos) – (3 beliebige Problemos)

beide Seiten gleich schwer

Dann muss X der Problemo Nr.4 sein, der nicht mitgewogen wurde.

WÄGUNG 3: (1 Normalo) – (Problemo Nr.4)

Wenn der Problemo Nr.4 oben ist, dann ist er leichter, sonst schwerer als die anderen. FERTIG.

linke Seite (Normalos) schwerer

Dann muss X unter den 3 Problemos sein (wir nennen sie A,B,C), und X muss leichter als die anderen sein.

WÄGUNG 3: (A) – (B)

beide gleich schwer

Dann muss X der nicht mitgewogene Problemo C sein (und wie gesagt leichter). FERTIG.

A schwerer als B

Da wir wissen, dass X leichter ist, muss X folglich B sein. FERTIG.

A leichter als B

Da X leichter ist, muss X in diesem Fall A sein. FERTIG.

rechte Seite (Problemos) schwerer

Dann muss X ebenfalls unter den 3 Problemos A,B,C sein, aber X muss nun schwerer als die anderen sein.

WÄGUNG 3: (A) – (B)

beide gleich schwer

Dann muss X der nicht mitgewogene Problemo C sein (und wie gesagt schwerer). FERTIG.

A schwerer als B

Da wir wissen, dass X schwerer ist, muss X folglich A sein. FERTIG.

A leichter als B

Da X schwerer ist, muss X in diesem Fall B sein. FERTIG.

eine Seite schwerer

Dann muss X unter den Kugeln 1 bis 8 sein. Diese acht Kugeln bleiben also weiterhin Problemlos, während die vier Kugeln 9 bis 12 ab sofort Normalos sind. X kann auf der schweren Seite liegen (dann ist X schwerer als die anderen), X kann aber auch auf der leichten Seite liegen (dann ist X leichter als die anderen). Wir nennen die vier Problemlos der leichten Seite die „Leicht-Problemlos“, die vier Problemlos der schweren Seite die „Schwer-Problemlos“ (andere Problemlos gibt es nicht, und außer diesen gibt es nur noch die vier Normalos).

Nun kommt die **Wägung mit dem kombinatorischen Trick**: Wir wählen für jede Seite jeweils drei Kugeln in „cleverer Kombination“. Und zwar so, dass die Wägung möglichst viel Information liefert. Dazu sollten wir beide Seiten möglichst *unsymmetrisch* mit den drei Kugelsorten *Normalos*, *Schwer-* und *Leicht-Problemlos* besetzen. (Symmetrische Figuren enthalten nur „halb so viel Information“ wie unsymmetrische, weil die gesamte Information der Figur schon in einer Hälfte steckt.) Wenn wir beide Seiten der Waage möglichst verschiedenartig besetzen, liefern die Wäge-Ergebnisse daher eher aussagekräftige Informationen. Zudem müssen wir so kombinieren, dass die Wäge-Ergebnisse alle Unterfälle möglichst gerecht unter sich aufteilen, damit bei keinem die Zahl der noch nötigen weiteren Wägungen zu groß wird.

Welche Kombination ist denn nun erfolgversprechend? Natürlich müssen wir rechts und links gleich viele Kugeln haben, so symmetrisch muss es schon sein. Aber wenn wir 4 Kugeln gegen einander wägen (also 2 gegen 2), dann bleiben ebenfalls 4 draußen, das wäre vielleicht schon zu symmetrisch. Also wägen wir lieber 3 gegen 3. Auf der einen Seite 3 verschiedene Sorten, auf der anderen 2 von der gleichen Sorte und eine andere; und zwar von den beiden Problemlos-Sorten, weil die mehr Information enthalten, als die Normalos, die ja alle gleich schwer sind. Wenn wir diese Überlegungen befolgen und etwas herumprobieren, finden wir z.B. die folgende Kombination, mit der wir tatsächlich hinkommen. (Eine ebenso gut funktionierende Kombination würden wir erhalten, wenn wir bei unserer Kombination jedes schwere durch ein leichtes Problemlo ersetzten und umgekehrt.)

WÄGUNG 2: (1 Normalo + 1 Leicht-P. + 1 Schwer-P.) – (2 Schwer-P. + 1 Leicht-P.)

beide Seiten gleich schwer

Dann sind alle Kugeln auf der Waage ab sofort Normalos, und X muss unter den Problemlos sein, die nicht auf der Waage liegen, das sind nur noch drei: Da 2 Leicht-Problemlos auf der Waage liegen (und jetzt Normalos sind), bleiben noch 2 *Leicht-Problemlos übrig*; und da 3 Schwer-Problemlos auf der Waage liegen (und jetzt ebenfalls Normalos sind), bleibt nur noch 1 *Schwer-Problemlo übrig*. Einer von diesen 3 Problemlos (2 Leicht-Problemlos, 1 Schwer-Problemlo) muss X sein. Die beiden leichten wägen wir nun gegen einander:

WÄGUNG 3: (der eine Leicht-Problemlo) – (der andere Leicht-Problemlo)

beide gleich schwer

Dann muss X der Schwer-Problemlo sein (und der ist schwerer als die anderen). FERTIG.

einer ist schwerer

Dann muss X der leichtere Leicht-Problemlo auf der Waage sein (und der ist leichter als die anderen). FERTIG.

linke Seite (1 Norm.+ 1 Leicht-P. + 1 Schwer-P.) schwerer als rechte Seite (2 Schwer-P. + 1 Leicht-P.)

Dann muss X entweder der Schwer-Problemlo S der linken Seite sein (dann ist X schwerer) oder der Leicht-Problemlo L der rechten Seite (dann ist X leichter). Alle andere Kugeln sind ab sofort Normalos. Wir brauchen jetzt nur noch einen der beiden übriggebliebenen Problemlos, S oder L, gegen einen Normalo zu wägen, um X zu finden. Wir wählen zum Beispiel S:

WÄGUNG 3: (S) – (1 Normalo)

beide gleich schwer

Dann hat S Normalgewicht, und X muss L sein (und X ist leichter als die anderen). FERTIG.

einer ist schwerer

Das kann nur S sein, dann muss X also S sein (und X ist schwerer als die anderen). FERTIG.

linke Seite (1 Norm.+ 1 Leicht-P. + 1 Schwer-P.) leichter als rechte Seite (2 Schwer-P. + 1 Leicht-P.)

Dann muss X entweder einer der beiden Schwer-Problemlos der rechten Seite sein (dann ist X schwerer) oder der Leicht-Problemlo der linken Seite (dann ist X leichter). Nur diese drei Kugeln sind jetzt noch Problemlos, alle anderen Kugeln sind ab sofort Normalos. Wir wägen die beiden übriggebliebenen Schwer-Problemlos gegen einander:

WÄGUNG 3: (der eine Schwer-Problemlo) – (der andere Schwer-Problemlo)

beide gleich schwer

Dann muss X der nicht mitgewogene Leicht-Problemlo sein (und X ist leichter als die anderen). FERTIG.

einer ist schwerer

Dann muss X der Schwer-Problemlo auf der schweren Seite sein (und X ist schwerer als die anderen). FERTIG.